

6. cvičení - řešení

Řešení: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/2223LS_MA2/06res.pdf

Několik poznámek:

Příklad 1 (d)

Monotonie lze též odvodit pomocí matematické indukce:

Dokažme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{n+1}{(n+1)^2+2} \leq \frac{n}{n^2+2}$.

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{(n+1)^2+2} &\leq \frac{n}{n^2+2} \\ (n+1)(n^2+2) &\leq n(n^2+2n+1+2) \\ n^3+2n+n^2+2 &\leq n^3+2n^2+3n \\ 2 &\leq n^2+n \end{aligned}$$

Poslední řádek zjevně platí pro každé $n \geq 1$.

Příklad 2 (d)

Ověření monotonie:

$$\begin{aligned} \frac{9}{\sqrt{n+10} + \sqrt{n+1}} &\leq \frac{9}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n}} \\ \sqrt{n+9} + \sqrt{n} &\leq \sqrt{n+10} + \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

Přičemž poslední řádek je splněn pro každé $n \in \mathbb{N}$, neb odmocnina je rostoucí funkce.

Příklad 3 (a)

V řešení se užívá známé limity $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{x}} = 1$

Alternativně: Pro každé $x \geq 0$ platí, že $\operatorname{arccotg} x \leq \frac{\pi}{2}$, tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že $\frac{2}{\pi} \leq \frac{1}{\operatorname{arccotg} \sqrt{n}}$. Z toho dostáváme, že pro $b_n = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n}$ platí, že $b_n \leq \frac{1}{n \operatorname{arccotg}^2 \sqrt{n}}$. Ze srovnávacího kritéria dostáváme, že zadaná řada diverguje, neb řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje dle Věty 7.6.

Příklad 3 (c)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \cdot \frac{2 \log n + \log(1 + \frac{1}{n})}{\log n} &\stackrel{\text{VoAL}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1 \right)} \cdot \left(2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n})}{\log n} \right) = \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{2}{2} \cdot (2 + 0) \end{aligned}$$

$$(**): \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n})}{\log n} \stackrel{\text{IH}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{-1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n \frac{n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n+1} = 0$$

Příklad 3 (d)

Jelikož pro $n > 1$ platí $\frac{n^2-1}{n^2+1} < 1$, tak platí, že $\left| \log \frac{n^2-1}{n^2+1} \right| = -\log \frac{n^2-1}{n^2+1}$

Příklad 3 (k)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ D. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ D, neb dle Věty 7.1 platí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ neexistuje nebo není rovna 0 a lze pak ukázat, že $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ též neexistuje nebo není rovna 0. Z toho pak z téže věty dostáváme, že $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ D.